Aula 5 – Modelos de Universo

C.A.Wuensche / C. Córdula Dantas
ca.wuensche@inpe.br
INPE - Divisão de Astrofísica

O Arcabouço teórico

- ☑ As equações de Einstein

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\,g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}} \qquad \boxed{1}$$

- ☑ Um caso particular são as chamadas equações de Friedmann-Lemaitre

O Arcabouço teórico

☑ Relações que descrevem a distância *ds* entre dois pontos no espaço são chamadas de *métricas* – um Universo homogêneo e isotrópico deve obedecer à chamada métrica de Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\varphi^2 \right)$$

C. A. Wuensche (INPE, 2020)

Equações de Friedmann-Lemaitre

Termo cinético, R é o fator de expansão do Universo (equivalente à energia cinética.

Termo de fontes, descreve os causadores da mudança dinâmica do Universo (equivalente à energia potencial gravitacional).

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2} = \boxed{\frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}} \tag{2}$$

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a}} = \boxed{-\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\varepsilon + \frac{3p}{c^2}\right)} \rightarrow \dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p) = 0 \tag{3}$$

$$\boxed{P = \omega\varepsilon} \tag{4}$$

Termo de fontes

Equação de estado

Termo dinâmico, envolve uma aceleração

DENSIDADES DE ENERGIA E EVOLUÇÃO DO UNIVERSO

Evolução versus componentes

- ☑ A dinâmica da expansão ocorre conforme o comportamento da componente dominante em determinada época

- ☑ Componentes: matéria e radiação (bom, e uma "constante cosmológica")

- ☑ A eq. (4) possui valores diferentes para w em função da componente, logo, a densidade total do Universo é dada pela soma de suas componentes (vistas na aula 2: matéria bariônica, matéria escura, neutrinos, fótons e energia escura).

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i \rightarrow P = \sum_i \omega_i \varepsilon_i \tag{5}$$

☑ A eq. (3) pode ser resolvida com (5), individualmente para cada componente

$$\varepsilon_i + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_i + p_i) = 0$$

$$\varepsilon_i + 3\frac{\dot{a}}{a}\varepsilon_i(1 + \omega_i) = 0 \qquad (6)$$

☑ Rearranjado a eq. (7), caímos numa EDO cuja solução padrão será uma lei de potência para a:

$$\frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i} = -3(1 + \omega_i)\frac{da}{a} \qquad (7)$$

$$\varepsilon_i(a) = \varepsilon_{i,0}a^{-3(1+\omega_i)} \qquad (8)$$

Valores diferentes de w fornecerão soluções diferentes!!

- ☑ Matéria: $\omega_i = 0 \rightarrow \varepsilon_m(a) = \varepsilon(m)_0 a^{-3}$ 9
- ☑ Radiação $\omega_i = 1/3 \rightarrow \varepsilon_m(a) = \varepsilon(m)_0 a^{-4}$ 10
- ☑ O termo extra (1/a) na radiação aparece em função da expansão cósmica que altera a energia dos fótons, uma vez que E = hν = hc/λ ∝ a^{-1}

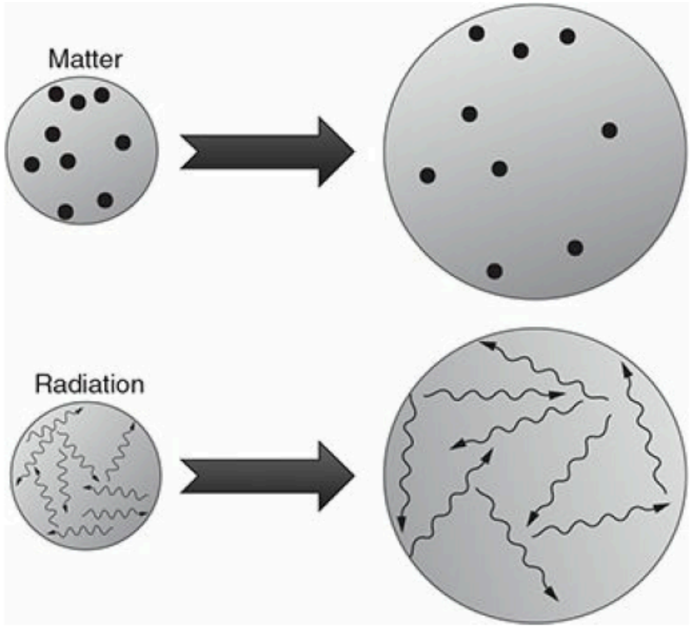


Figure 5.1 The dilution of nonrelativistic particles ("matter") and relativistic particles ("radiation") as the universe expands.

Ref: Introduction to Cosmology (B.Ryden, 2016)

- O raciocínio anterior baseia-se na hipótese de que fótons se conservam, o que não é verdade (galáxias e estrelas produzem fótons o tempo todo; grande parte deles é absorvido)

- Fótons da CMB, entretanto, são muito menos absorvidos devido à densidade do Universo, e sua densidade de energia é >> que a densidade de fótons emitidos por todas as outras fontes.

- A aproximação de considerar que a contribuição para a radiação do Universo vem somente da CMB é aceitável.

$$\varepsilon_{CMB,0} = \sigma T_0^4 = 4.175 \times 10^{-14} J/m^3 = 0.2606 MeV/m^3 \tag{11}$$

$$\Omega_{CMB,0} = \frac{\varepsilon_{CMB,0}}{\varepsilon_{c,0}} = \frac{0.2606}{4870} = 5.35 \times 10^{-5} \tag{12}$$

- ☑ Neutrinos contribuem com uma densidade de energia semelhante à dos fótons da CMB. Os cálculos detalhados mencionados pela B. Ryden na pág. 72 podem ser encontrados, p.ex., no cap. 3 do livro "The Early Universe" (E. Kolb e M. Turner, 1990).

$$\varepsilon_\nu = \frac{7}{8}(\frac{4}{11})^{4/3} = 0.227\varepsilon_{CMB} = 0.0591 MeV/m^3 \tag{13}$$

$$\Omega_\nu = 0.681\Omega_{CMB}$$

- ☑ Os resultados acima valem para neutrinos relativísticos em 14
que sua massa >> massa de repouso. Hoje, teríamos:

$$\Omega_{r,0} = \Omega_{\nu,0} + \Omega_{CMB,0} = 9 \times 10^{-5} \tag{15}$$

- Matéria escura e energia escura não tem suas densidades determinadas de maneira tão precisa, uma vez que seus constituintes são desconhecidos.

- Evidências atuais sugerem que o Universo é quase plano (mas não completamente) e que nele existem duas componentes cujo efeito pode ser identificado indiretamente.

- No caso da matéria escura, efeitos nas curvas de rotação de galáxias e lentes gravitacionais sugerem que $\Omega_{m,0} \sim 6.5\,\Omega_{b,0} = 0.311$, com os valores publicados no Planck 2018 results: VI. Cosmological Parameters (A&A, 641, 2020).

- O valor para a energia escura é obtido indiretamente das medidas do Planck e de BAO, e é da ordem de $\Omega_{\Lambda,0} = 0.6889$ (idem, resultado do Planck).

- ☑ Os valores $\Omega_{m,0}$ = 0.311, $\Omega_{\Lambda,0} = 0.6889, \Omega_{b,0} = 0.049$ e $\Omega_{k,0} = 0$ são parâmetros do que normalmente chamamos de "Concordance Model" e a B. Ryden chama de "Benchmark Model".

- ☑ Podemos estimar, indiretamente, $\Omega_{\Lambda,0}$ = 1 - $\Omega_{M,0} - \Omega_{r,0} \approx 0.69$, já considerando que a curvatura é igual a zero,

- ☑ Podemos comparar as épocas de "dominação" de cada uma dessas componentes, em função do fator de escala.

  - ✓ Hoje: $$\frac{\varepsilon_{\Lambda,0}}{\varepsilon_{M,0}} = \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{M,0}} = \frac{0.69}{0.31} = 2.23 \tag{16}$$

  - ✓ Quando matéria e Λ se igualaram:

$$\frac{\varepsilon_\Lambda(a)}{\varepsilon_M(a)} = \frac{\varepsilon_{\Lambda,0}}{\varepsilon_{M,0}/a^3} = \frac{\Omega_\Lambda(a)}{\Omega_M(a)}a^3 = 1 \tag{17}$$

$$a_{m\Lambda} = \frac{\Omega_\Lambda(a)}{\Omega_M(a)}^{-1/3} \approx 0.766 \to z(a = 0.766) = 0.305 \tag{18}$$

z_{eq}, na verdade, é bem maior que 0.305

✓ Quando matéria e radiação se igualaram:

$$\frac{\varepsilon_r(a)}{\varepsilon_M(a)} = \frac{\varepsilon_{r,0}}{\varepsilon_{M,0}}a = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{M,0}}a \tag{19}$$

$$a_{m,r} = \frac{\Omega_r(a)}{\Omega_M(a)}^{-1} = \frac{9\times 10^{-5}}{0.31} \approx 1/3400 \approx 2.9\times 10^{-4} \tag{20}$$

$$z(a = 2.9\times 10^{-4}) = 3447.27 \tag{21}$$

z_{eq}, na verdade, é maior que 3447.27

- ☑ Fizemos essas contas considerando neutrinos relativísticos, pois na época sua energia era >> massa de repouso. Hoje, eles teriam temperaturas da ordem de 1 K, sendo, portanto, não-relativísticos.
- ☑ Componentes diferentes dominam a dinâmica da expansão (como a se comporta) em épocas diferentes. A radiação dominou primeiro (a^{-4}), depois a matéria (a^{-3}) e hoje Λ (a^2).
- ☑ Possível usar a ou z como substituto de t, uma vez que a expansão cósmica é monotônica.

- Analisar a eq. de Friedmann com todas as componentes simultâneas não é simples, de forma que nas próximas seções vamos fazer a análise caso a caso.

- Por que não é simples? Veja a dependência com o expoente de a...

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\sum_i \varepsilon_{i,0} a^{-1-3w} - \frac{kc^2}{R_0^2} \tag{22}$$

- w=-1 para Λ, w=0 para matéria e w=1/3 para radiação, de forma que as soluções para cada época terão uma integraçao com dependência diferente para a.

- Seguiremos com as análises separadas.

MODELO DE UNIVERSO VAZIO

Um universo vazio?

- ☑ Ausência de massa, de radiação, de energia escura...
- ☑ A solução para a eq. de Friedmann, nesse caso, é (para a_0=1):

$$\dot{a}^2 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$ 23

- ☑ Solução possível para um universo fechado (k=-1)

$$\dot{a} = \pm \frac{c}{R_0} \rightarrow \int da = \frac{c}{R_0}\int_{t0}^{t} dt = \frac{t}{t_0}$$ 24

- ☑ Com $t_0=R_0/c$. Nesse caso, a idade do Universo $t_0 = H_0^{-1}$. Não há matéria para desacelerar a expansão.

Curiosidade matemática...

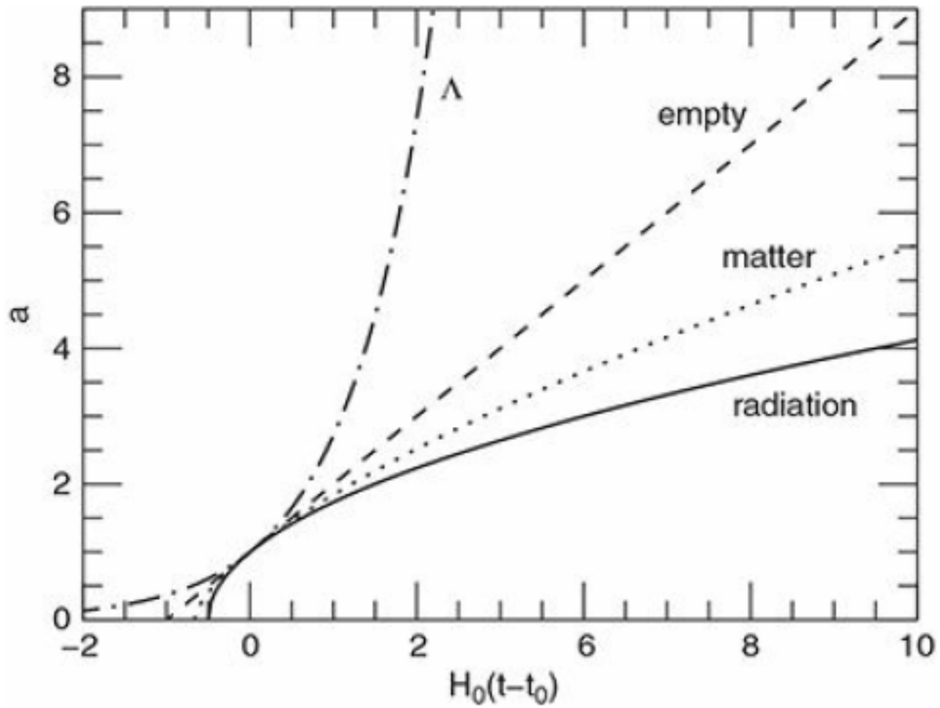
- ☑ Para efeitos de calcular um sinal físico, podemos considerar um universo vazio, com densidade muito pequena.

- ☑ Supondo a existência de um observador, a distância própria entre uma galáxia distante e o observador é dada por:

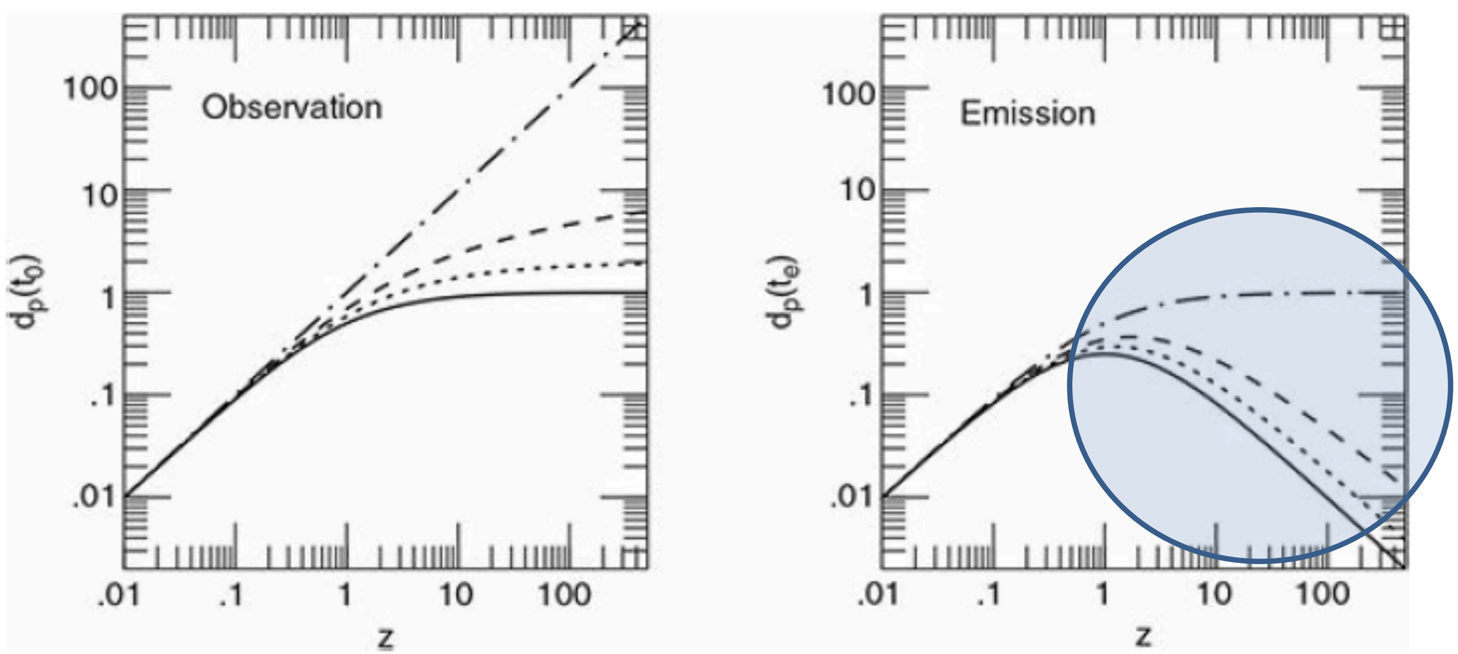
$$d_p(t_0) = c\ t_0 \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{t} = c\ t_0\ ln(t_0/t_e) \tag{25}$$

$$\begin{aligned} d_p(t_0) &= c\ t_0 \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{t} = c\ t_0\ ln(t_0/t_e) \\ &= \frac{c}{H_0}\ ln(1+z) \end{aligned} \tag{26}$$

Um universo vazio?



Porque esse comportamento para a distância no momento da emissão?



Ref: Introduction to Cosmology (B.Ryden, 2016)

- ☑ No caso do emissor, o Universo era menor por uma razão entre fatores de escala $a(t_e)/a(t_0)$ = 1/1+z. Assim, a equação para $d(t_0)$ é reescrita para $d(t_e)$ como:

$$d_p(t_e) = \frac{c}{H_0} \frac{ln(1+z)}{1+z} \qquad (27)$$

- ☑ A eq. () tem um máximo em z = 1.72. Antes disso vemos objetos mais distantes a uma distância própria do emissor cada vez maior.

- ☑ Após essa distância máxima a queda em $d_p(t_e)$ ocorre porque, no passado ($a(t_e) \ll a(t_0)$), os emissores estavam muito mais perto dos observadores.

MODELOS DE UNIVERSO COM UMA COMPONENTE

Universos com uma componente

- ☑ De novo, a eq. de Friedmann... Mas agora com a presença explícita de Λ:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\varepsilon_M + \varepsilon_\Lambda\right) - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2} \tag{29}$$

- ☑ Num primeiro momento, vamos considerar um universo plano (k=0) e explorar as possibilidades de soluções com diferentes valores de ε: somente matéria, somente radiação e somente Λ.

- ☑ Ryden supõe uma solução em que $a \propto t^q$, modificando a eq. Friedmann e derivando uma solução para q (q=2/(3+3w))

$$H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{2}{3(1+w)} t_0^{-1}$$ 30

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)} H_0^{-1}$$

- ☑ Vários resultados para tempo, densidade e fator de escala são derivados no texto, e vamos discutir o resultado referente ao tempo da fonte emissora

$$\frac{1}{1+z} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \left(\frac{t_0}{t_e}\right)^{2/(3+3w)}$$ 31

$$t_e = \frac{t_0}{(1+z)^{3(1+w)/2}} = \frac{2}{2(1+w)H_0} \frac{1}{(1+z)^{3(1+w)/2}}$$ 32

w≠-1/3

☑ A distância própria até a galáxia emissora é dada por:

w≠-1/3

$$d_p(t_0) = c\int_{t_e}^{t_0}\frac{dt}{a(t)} = c\; t_0\frac{3(1+w)}{1+3w}[1-(t_e/t_0)^{(1+3w)/(3+3w)}] \quad \boxed{33}$$

☑ Escrevendo a eq. (32) em termos de H0 e z, a distância própria fica:

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0}\frac{2}{1+3w}[1-(1+z)^{-(1+3w)/2}] \quad \boxed{34}$$

☑ A distância própria ao horizonte cósmico é a distância definida por um emissor distante cujo sinal está agora chegando ao observador.

$$d_{hor}(t_0) = c\int_0^{t_0}\frac{dt}{a(t)} \quad \boxed{35}$$

- No horizonte, com z >> 1, a eq. (33) dá o resultado da eq. (34)

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0}\frac{2}{1+3w} \tag{36}$$

- Para w=0 ou w=1/3, o observador só ve uma porção do universo; para w<= -1/3, o sentido da distância infinita (ou negativa, para w < -1/3) é que todo o espaço está causalmente conectado a todos os observadores.

Universo só com matéria

- ☑ w=0, t_0 = $2/3H_0$ (da eq. (30)).

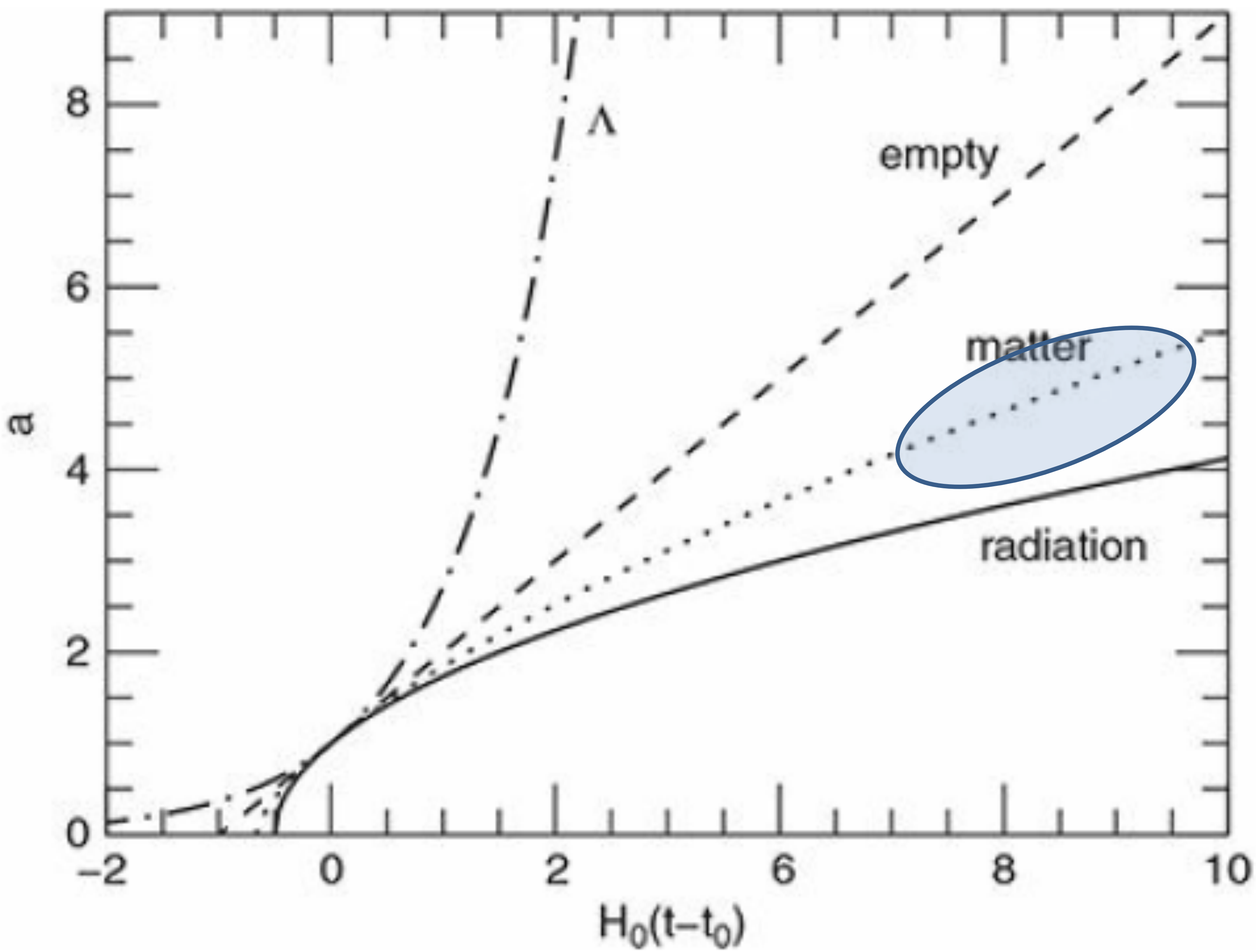
$$d_{hor}(t_0) = 3\ c\ t_0 = 2\ c/H_0 \qquad (37)$$

$$a_m(t) = (t/t_0)^{2/3} \qquad (38)$$

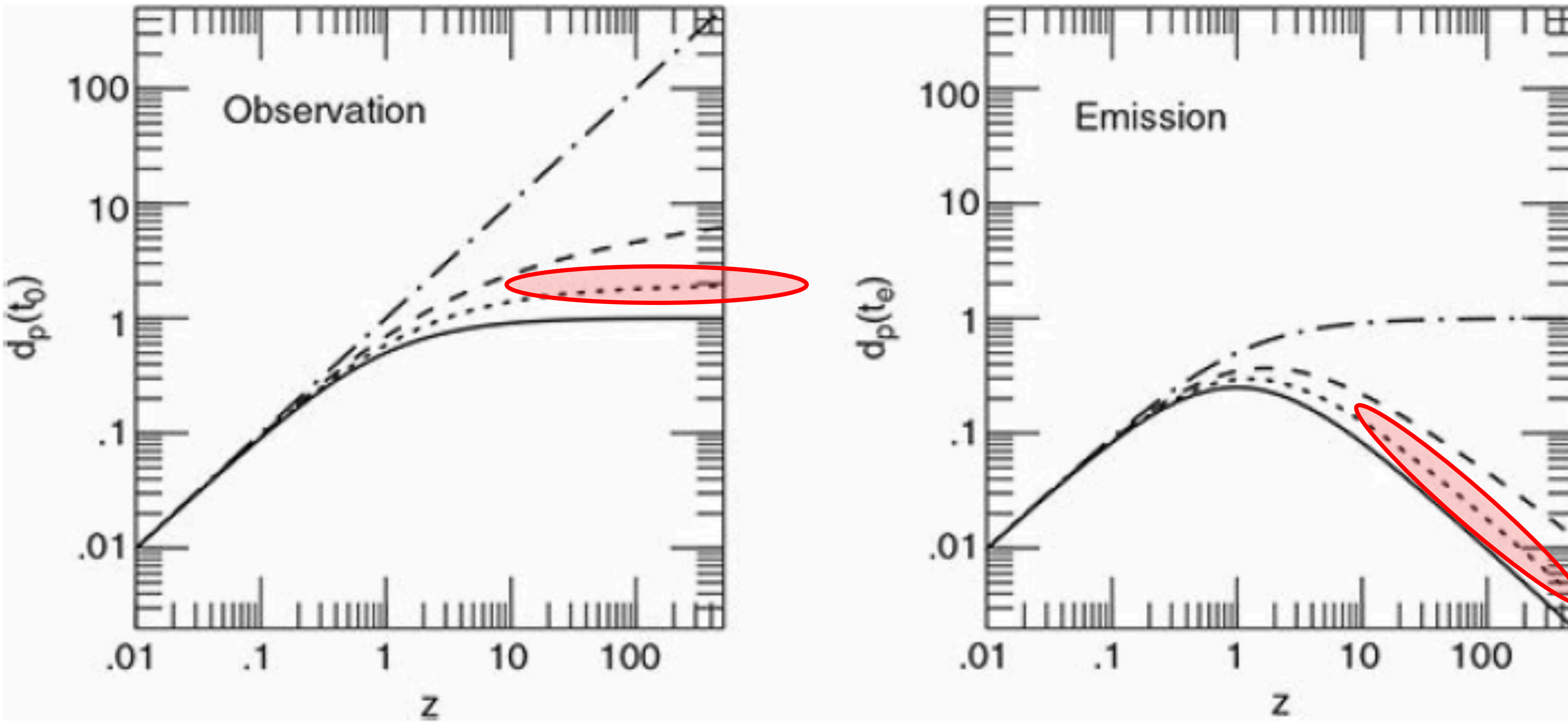
- ☑ As distância até uma galáxia em um redshift z, dos pontos de vista de um observador na galáxia ou num ponto distante, são dadas por:

$$d_p(t_0) = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{(t/t_0)^{2/3}} = 3\ c\ t_0\Big[1 - (\frac{t_e}{t_0})^{1/3}\Big] = \frac{2c}{H_0}\Big[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\Big] \qquad (39)$$

$$d_e(t_0) = \frac{2c}{H_0(1+z)}\Big[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\Big] \qquad (40)$$



Ref: Introduction to Cosmology (B.Ryden, 2016)



Ref: Introduction to Cosmology (B.Ryden, 2016)

Universo só com radiação

- ☑ w=1/3, t_0 = 1/2H_0 (da eq. (30)).

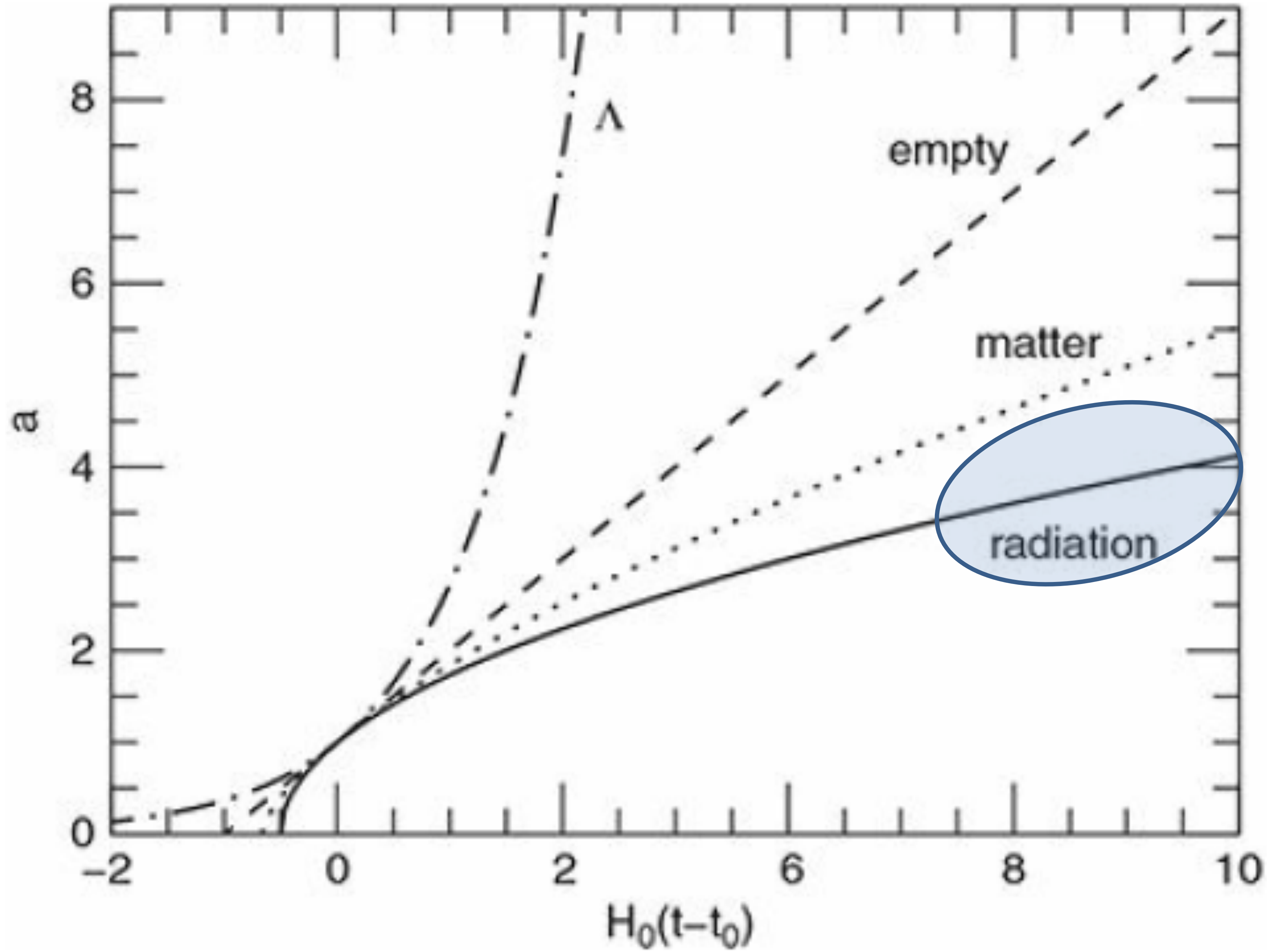
$$d_{hor}(t_0) = 2\ c\ t_0 = c/H_0 \tag{41}$$

$$a_m(t) = (t/t_0)^{1/2} \tag{42}$$

- ☑ As distância até uma galáxia em um redshift z, dos pontos de vista de um observador na galáxia ou num ponto distante, são dadas por:

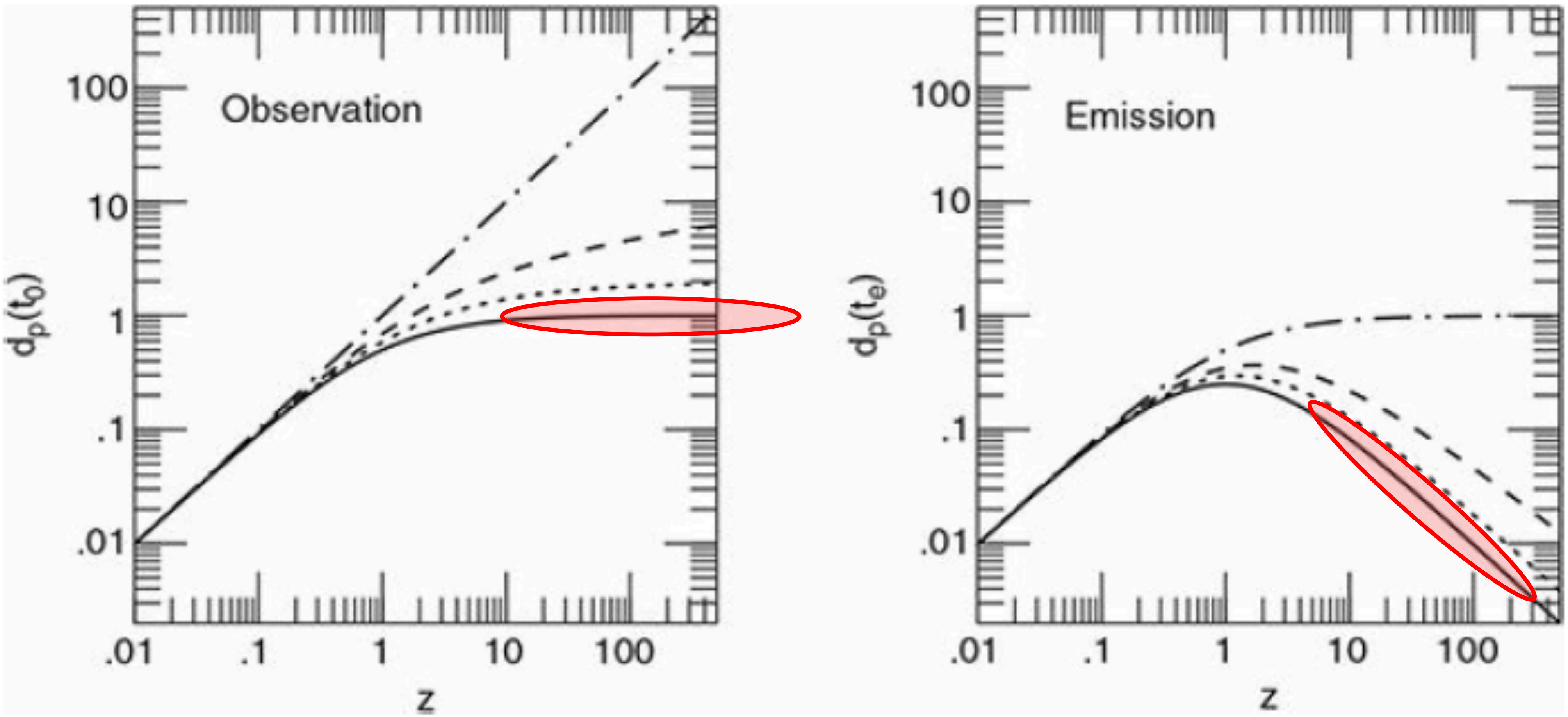
$$d_p(t_0) = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{(t/t_0)^{1/2}} = 2\ c\ t_0\Big[1 - (\frac{t_e}{t_0})^{1/2}\Big] = \frac{c}{H_0}\frac{z}{1+z} \tag{43}$$

$$d_e(t_0) = \frac{c}{H_0}\frac{z}{(1+z)^2} \tag{44}$$



Ref: Introduction to Cosmology (B.Ryden, 2016)

Um universo só
com radiação



Ref: Introduction to Cosmology (B.Ryden, 2016)

Universo só com Λ

☑ Nesse caso, w pode assumir valores diversos. Se partirmos da eq. de Friedmann considerando somente Λ, teremos uma solução exponencial.

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_\Lambda a^2 \qquad \boxed{45}$$

$$\dot{a} = H_0 a, \quad \text{considerando que} \quad H_0 = \left(\frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_\Lambda\right)^{1/2} \qquad \boxed{46}$$

☑ A solução da eq. (46) é, justamente:

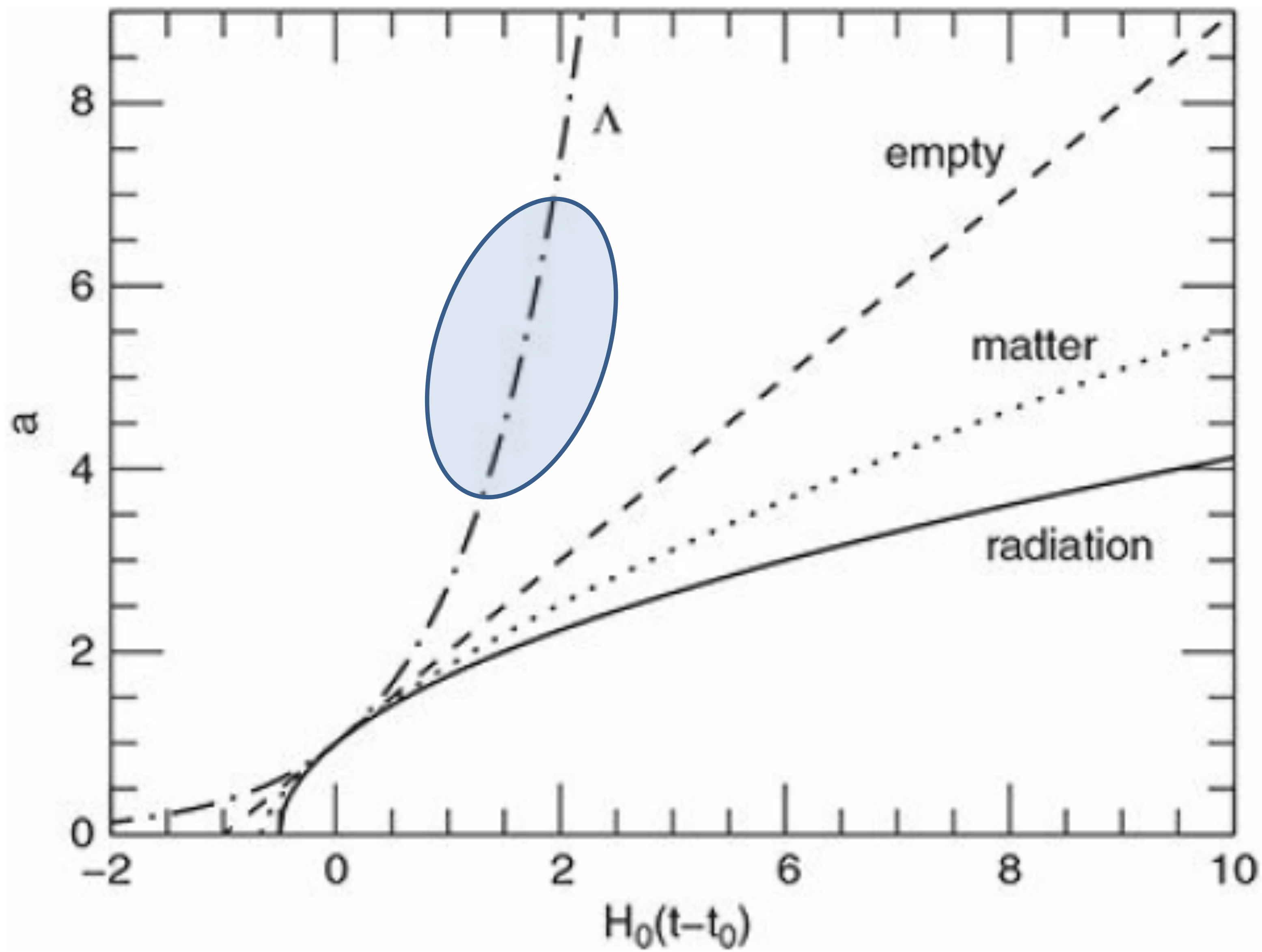
$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)} \qquad \boxed{47}$$

☑ Um universo plano dominado por Λ é infinitamente velho e tem d_{hor} também infinita. As distâncias próprias são calculadas da mesma forma que para os outros componentes.

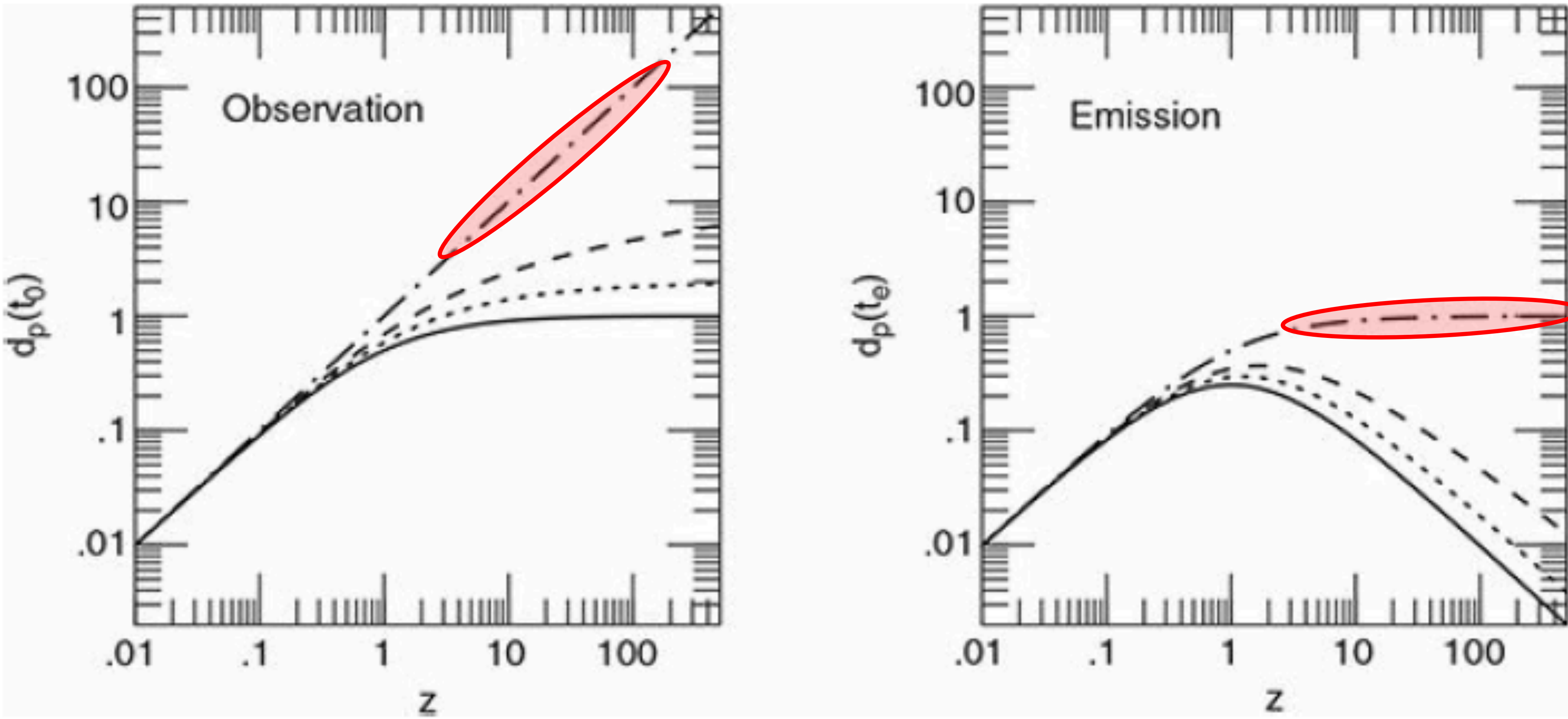
$$d_p(t_0) = c\int_{t_e}^{t_0} e^{H_0(t-t_0)}dt = \frac{c}{H_0}\left[e^{H_0(t_0-t_e)} - 1\right] = \frac{c}{H_0}z \quad \boxed{48}$$

$$d_p(t_e) = \frac{c}{H_0}\frac{z}{1+z} \quad \boxed{49}$$

- ☑ O universo dominado pela constante cosmológica expande-se permanentemente e a distância própria (para o observador) cresce linearmente
- ☑ Para pontos dentro do horizonte e z>>1, d_p >> c/H_0, mas no momento da emissão, $d_e \sim c/H_0$ (localmente, z << 1).
- ☑ Uma vez que a fonte esteja a uma distância d > c/H_0, sua velocidade de recessão é > c e os fótons não vão mais chegar ao observador.



Ref: Introduction to Cosmology (B.Ryden, 2016)



Ref: Introduction to Cosmology (B.Ryden, 2016)

MODELOS DE UNIVERSO COM VÁRIAS COMPONENTES

Universo com várias componentes

- Passamos a tratar a eq. de Friedmann completa e o modelo de universo se complica, ao termos que resolve-la simultaneamente para várias componentes que se comportam de forma diferente para cada valor de a (ou z).

- É possível escrever a eq. de Friedmann com todas as dependências das diversas componentes (incluindo a curvatura) na forma

Se diferente de zero, indica curvatura

$$E(a) = \frac{H}{H_0} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_\Lambda + \boxed{\frac{1-\Omega_0}{a^2}}$$

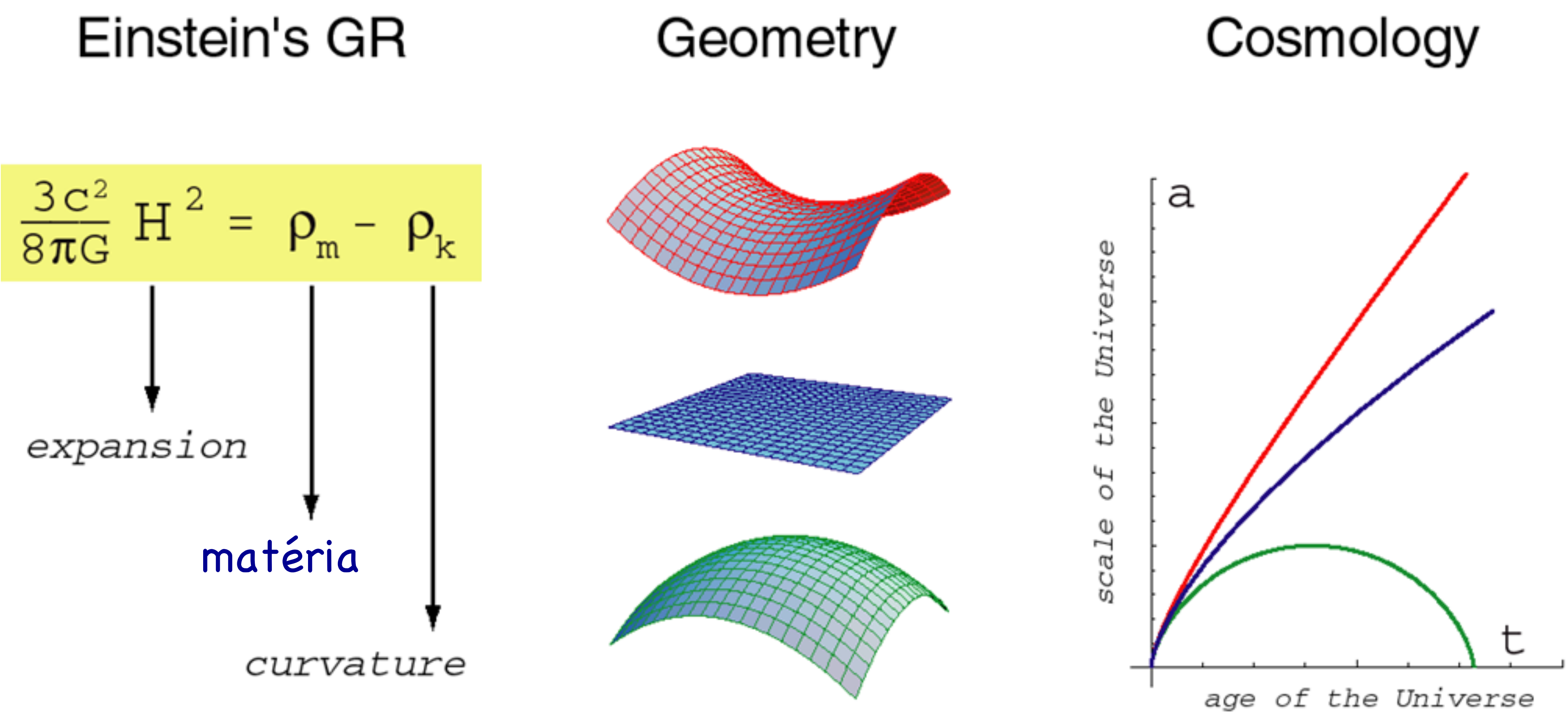
50

- O cálculo do tempo cósmico não é mais "direto" e a solução analítica não é possível para todos os tempos.
- Entretanto, soluções numéricas são possíveis em diversas situações

$$\int_0^a \frac{da}{[\Omega_{r,0}/a^2 + \Omega_{m,0}/a + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + (1-\Omega_0)^{1/2}]} = H_0 \; t \tag{51}$$

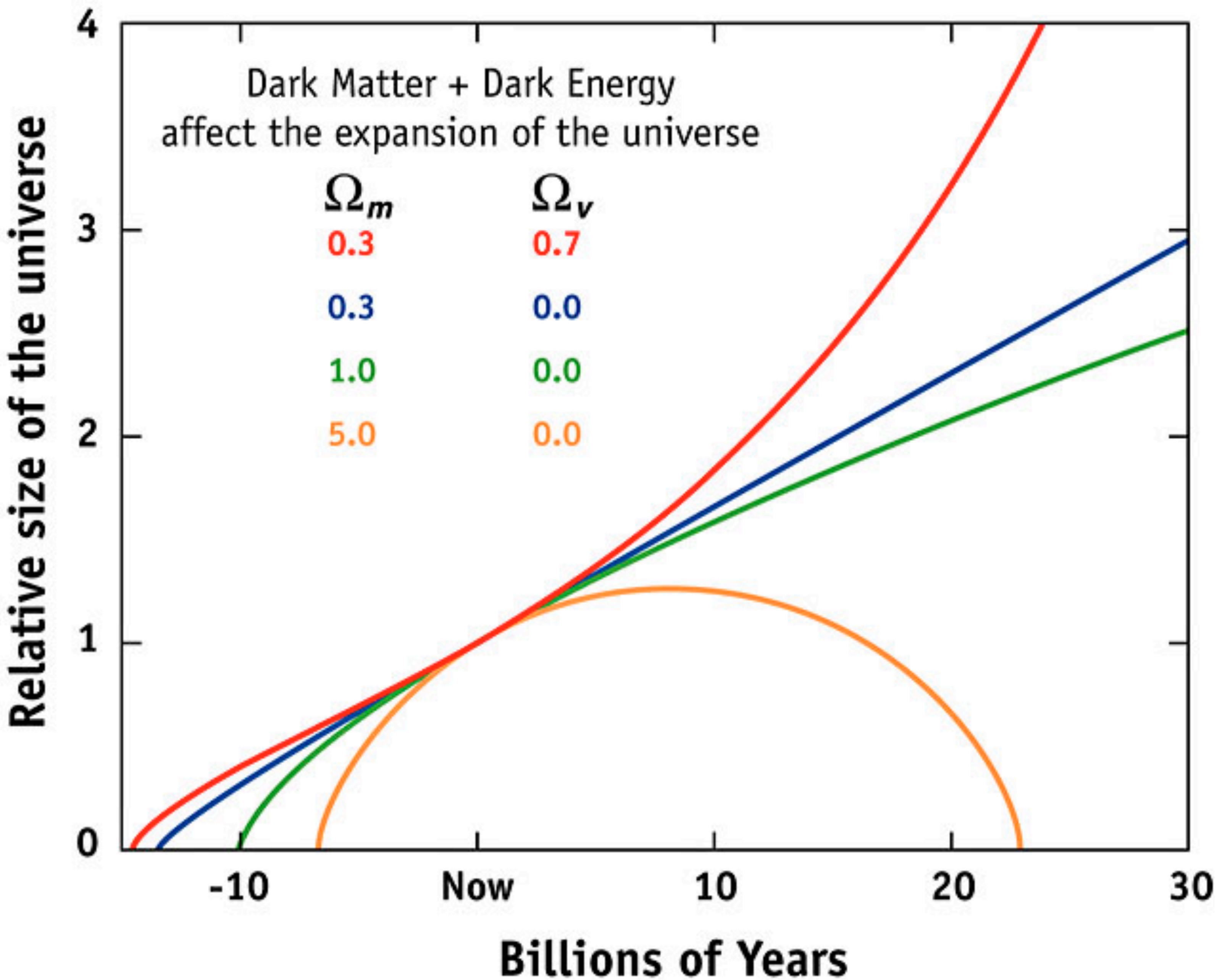
- Casos:
  - ✓ Matéria + Curvatura
  - ✓ Matéria + Λ
  - ✓ Matéria + curvatura + Λ
  - ✓ Matéria + radiação

Evolução Cósmica



Crédito: Robert Caldwell (Dartmouth College)

Expansion of the Universe



Fonte: http://map.gsfc.nasa.gov

☑ Modelo "padrão" do início dos anos 90

$$a(t) = (\frac{t}{t_0})^{2/3} \qquad \boxed{\Omega_0 = \Omega_m} \qquad \boxed{52}$$

$$(\frac{H(t)}{H_0})^2 = \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2} \qquad \boxed{53}$$

☑ Possibilidades, expansão, expansão assintótica e contração:

- ✓ $\Omega_0 > 1 \ (k = 1)$ contração (Big Crunch)
- ✓ $\Omega_0 = 1 \ (k = 0)$ expansão assintótica (Big Chill, $a \propto t^{2/3}$)
- ✓ $\Omega_0 < 1 \ (k = -1)$ expansão (Big Chill, $a \propto t$)

- ☑ Nesse caso, a densidade define o destino do Universo.
- ☑ Soluções paramétricas para a eq. (53), com termos em seno,cosseno (k=+1) e seno e cosseno hiperbólicos (k=-1)

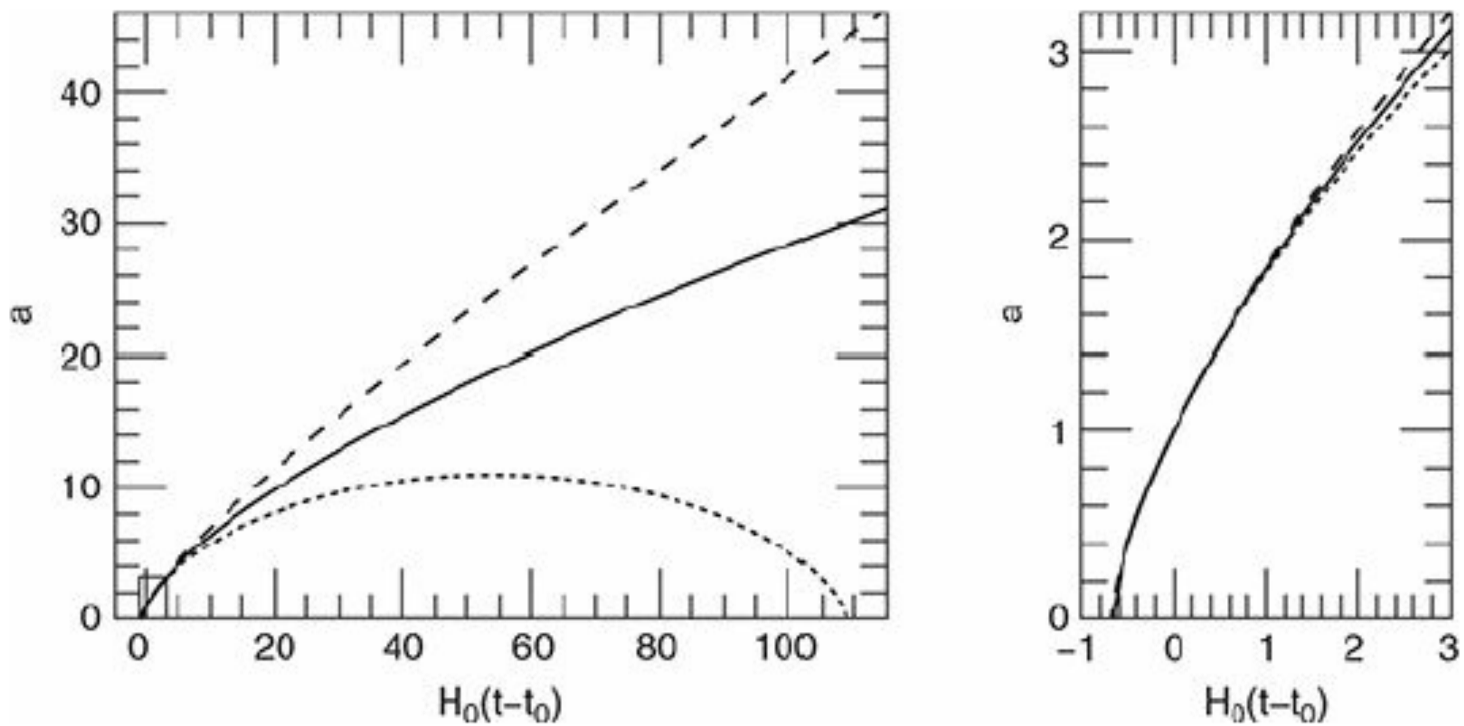


Figure 5.4 Scale factor versus time for universes containing only matter. Solid line: $a(t)$ for a universe with $\Omega_0 = 1$ (flat). Dashed line: $a(t)$ for a universe with $\Omega_0 = 0.9$ (negatively curved). Dotted line: $a(t)$ for a universe with $\Omega_0 = 1.1$ (positively curved). The right panel is a blow-up of the small rectangle near the lower left corner of the left panel.

☑ Modelo "padrão" atual

$$\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{M,0} \quad (54)$$

$$\left(\frac{H(t)}{H_0}\right)^2 = \frac{\Omega_{M,0}}{a^3} + 1 - \Omega_{M,0} \quad (55)$$

☑ Possibilidades: expansão e contração, se $\Omega_\Lambda < 0$:

- ✓ Aparentemente, nosso Universo tem $\Lambda > 0$

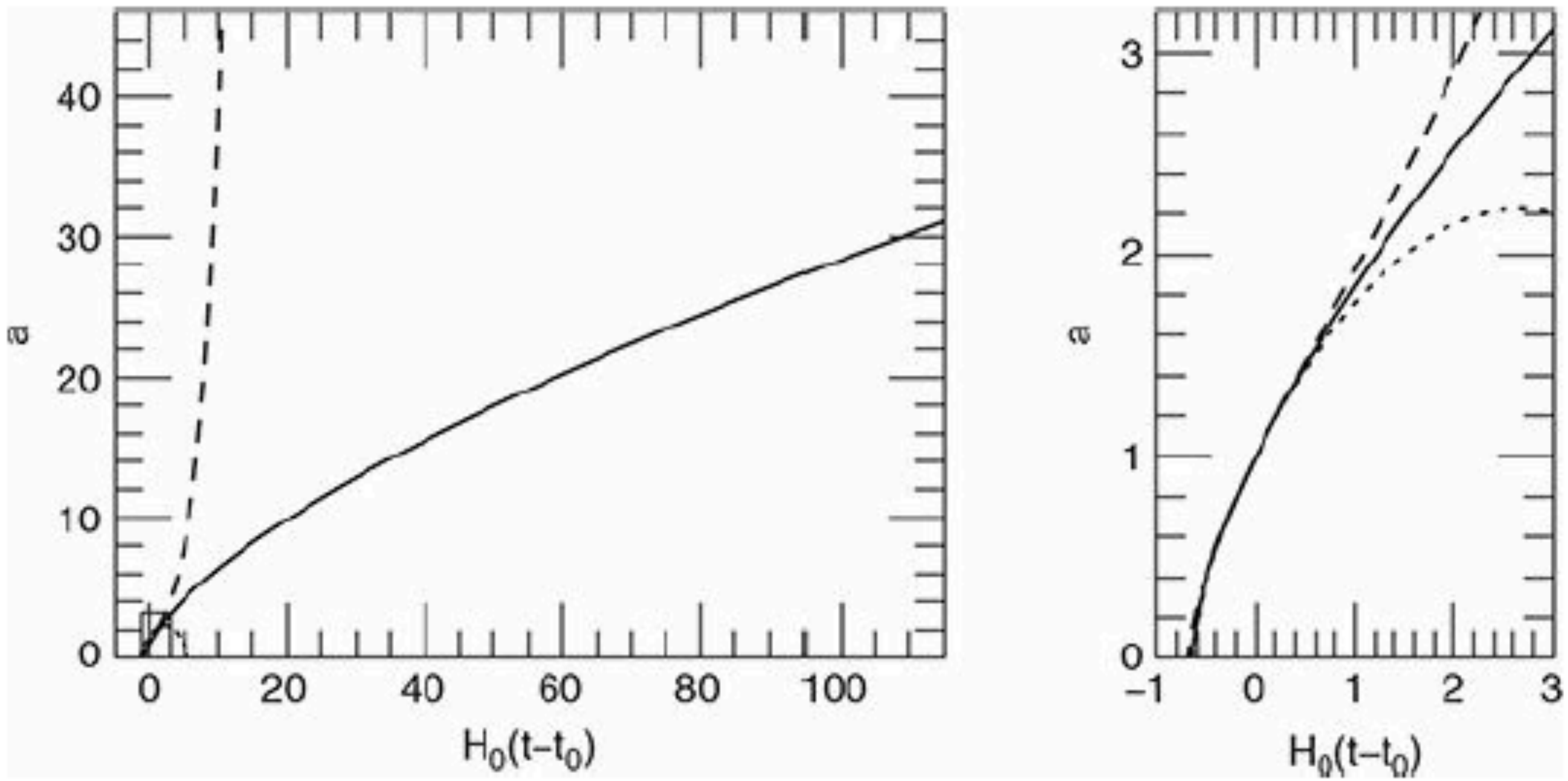


Figure 5.5 Scale factor versus time for flat universes containing both matter and a cosmological constant. Solid line: $a(t)$ for a universe with $\Omega_{m,0} = 1$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0$. Dashed line: $a(t)$ for a universe with $\Omega_{m,0} = 0.9$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0.1$. Dotted line: $a(t)$ for a universe with $\Omega_{m,0} = 1.1$, $\Omega_{\Lambda,0} = -0.1$. The right panel is a blow-up of the small rectangle near the lower left corner of the left panel.

Ref: Introduction to Cosmology (B.Ryden, 2016)

- ☑ Modelo "padrão" atual com as tensões apresentadas nos últimos 2 anos (e.g., Valentino et al. 2019):

$$\left(\frac{H(t)}{H_0}\right)^2 = \frac{\Omega_{M,0}}{a^3} + \frac{1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0} \qquad \boxed{56}$$

- ☑ Possibilidades: expansão e contração, se $\Omega_\Lambda < 0$:
  - ✓ Aparentemente, nosso Universo tem $\Lambda > 0$

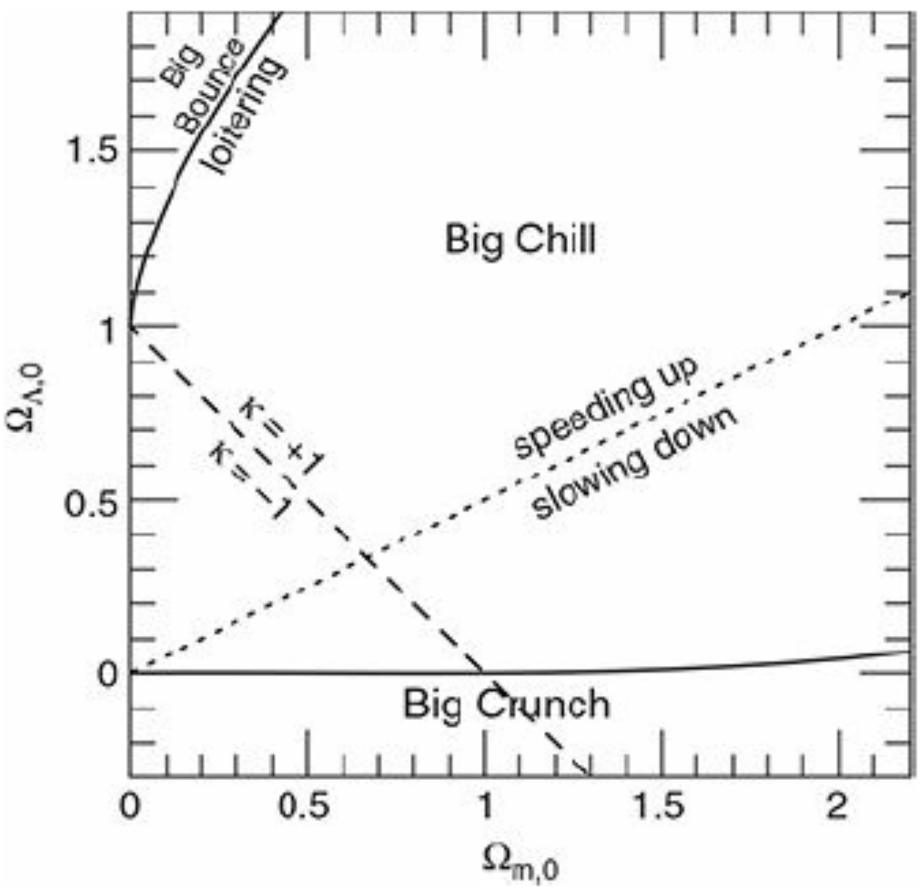


Figure 5.6 Properties of universes containing matter and a cosmological constant. The dashed line indicates flat universes ($\kappa = 0$). The dotted line indicates universes that are not accelerating today ($q_0 = 0$ at $a = 1$). Also shown are the regions where the universe has a "Big Chill" expansion ($a \to \infty$ as $t \to \infty$), a "Big Crunch" recollapse ($a \to 0$ as $t \to t_{\rm crunch}$), a loitering phase ($a \approx$ constant for an extended period), or a "Big Bounce" ($a = a_{\rm min} > 0$ at $t = t_{\rm bounce}$).

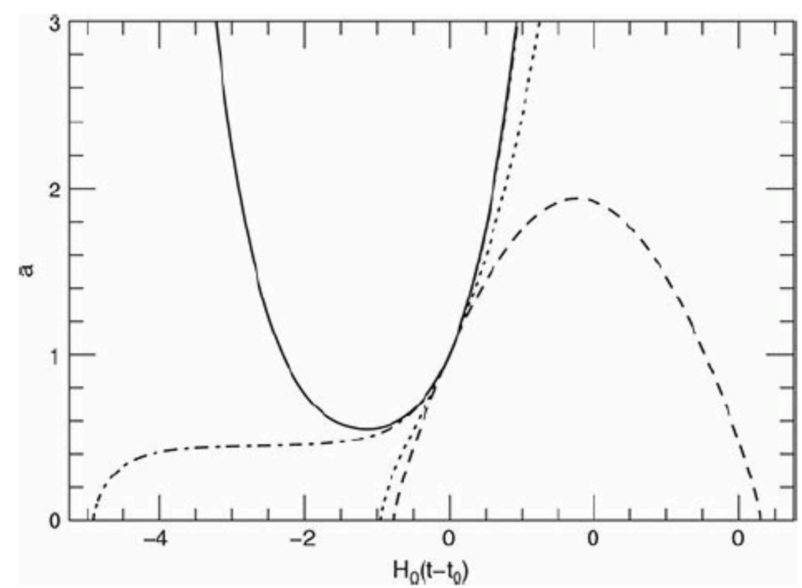


Figure 5.7 Scale factor versus time in four different universes, each with $\Omega_{m,0} = 0.31$. Dotted line: a flat "Big Chill" universe ($\Omega_{\Lambda,0} = 0.69$, $\kappa = 0$). Dashed line: a "Big Crunch" universe ($\Omega_{\Lambda,0} = -0.31$, $\kappa = -1$). Dot-dash line: a loitering universe ($\Omega_{\Lambda,0} = 1.7289$, $\kappa = +1$). Solid line: a "Big Bounce" universe ($\Omega_{\Lambda,0} = 1.8$, $\kappa = +1$).

Ref: Introduction to Cosmology (B.Ryden, 2016)

☑ Universo dominado por radiação desde o Big Bang, com a transição ocorrendo em t ~ 50.000 anos

$$\left(\frac{H(t)}{H_0}\right)^2 = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} \quad \boxed{59}$$

☑ Isso justifica, junto com o valor da densidade de radiação hoje, desconsiderarmos sua contribuição no cálculo da densidade total do Universo.

MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO (BENCHMARK)

Parâmetros cosmológicos

Parameter	Meaning	Definition
ω_b	Baryon density	$\omega_b = \Omega_b h^2$
ω_d	Dark matter density	$\omega_d = \Omega_d h^2$
f_ν	Dark matter neutrino fraction	$f_\nu = \rho_\nu / \rho_d$
Ω_Λ	Dark energy density	
w	Dark energy equation of state	p_Λ / ρ_Λ (approximated as constant)
Ω_k	Spatial curvature	
τ	Reionization optical depth	
A_s	Scalar fluctuation amplitude[IC]	Primordial scalar power at chosen pivot $k_* = 0.05/\mathrm{Mpc}$
n_s	Scalar spectral index [IC]	Primordial spectral index at $k*$
α	Running of spectral index[IC]	$\alpha = d \ln n_s / d \ln k$ (approximated as constant)
r	Tensor-to-scalar ratio[IC]	Tensor-to-scalar power ratio at k_*
n_t	Tensor spectral index [IC]	
z_{ion}	Reionization redshift (abrupt)	$z_{\mathrm{ion}} \approx 92(0.03 h\tau/\omega_b)^{2/3}\Omega_m^{1/3}$ (assuming abrupt reionization)
ω_{m}	Physical matter density	$\omega_{\mathrm{m}} = \omega_b + \omega_d = \Omega_m h^2$
Ω_m	Matter density/critical density	$\Omega_m = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_k$
Ω_{tot}	Total density/critical density	$\Omega_{\mathrm{tot}} = \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k$
A_t	Tensor fluctuation amplitude	$A_t = r A_s$
M_ν	Sum of neutrino masses	$M_\nu \approx (94.4\ \mathrm{eV}) \times \omega_d f_\nu$
h	Hubble parameter	$h = \sqrt{(\omega_d + \omega_b)/(1 - \Omega_k - \Omega_\Lambda)}$
t_0	Age of Universe	
σ_8	Galaxy fluctuation amplitude within sphere $R = 8h^{-1}\mathrm{Mpc}$	$\sigma_R^2 = \int_0^\infty W[kR]^2 P(k) \frac{k^2 dk}{2\pi^2}$, $W(x) = 3(\sin x - x\cos x)/x^3$

Ostriker & Souradeep 2004

PLANCK 2018 results

Parameter	`Plik` best fit	`Plik` [1]	`CamSpec` [2]	$([2]-[1])/\sigma_1$	Combined
$\Omega_b h^2$	0.022383	0.02237 ± 0.00015	0.02229 ± 0.00015	−0.5	0.02233 ± 0.00015
$\Omega_c h^2$	0.12011	0.1200 ± 0.0012	0.1197 ± 0.0012	−0.3	0.1198 ± 0.0012
$100\theta_{MC}$	1.040909	1.04092 ± 0.00031	1.04087 ± 0.00031	−0.2	1.04089 ± 0.00031
τ	0.0543	0.0544 ± 0.0073	$0.0536^{+0.0069}_{-0.0077}$	−0.1	0.0540 ± 0.0074
$\ln(10^{10} A_s)$	3.0448	3.044 ± 0.014	3.041 ± 0.015	−0.3	3.043 ± 0.014
n_s	0.96605	0.9649 ± 0.0042	0.9656 ± 0.0042	+0.2	0.9652 ± 0.0042
$\Omega_m h^2$	0.14314	0.1430 ± 0.0011	0.1426 ± 0.0011	−0.3	0.1428 ± 0.0011
H_0 [km s^{-1}Mpc^{-1}] . . .	67.32	67.36 ± 0.54	67.39 ± 0.54	+0.1	67.37 ± 0.54
Ω_m	0.3158	0.3153 ± 0.0073	0.3142 ± 0.0074	−0.2	0.3147 ± 0.0074
Age [Gyr]	13.7971	13.797 ± 0.023	13.805 ± 0.023	+0.4	13.801 ± 0.024
σ_8	0.8120	0.8111 ± 0.0060	0.8091 ± 0.0060	−0.3	0.8101 ± 0.0061
$S_8 \equiv \sigma_8(\Omega_m/0.3)^{0.5}$ . .	0.8331	0.832 ± 0.013	0.828 ± 0.013	−0.3	0.830 ± 0.013
z_{re}	7.68	7.67 ± 0.73	7.61 ± 0.75	−0.1	7.64 ± 0.74
$100\theta_*$	1.041085	1.04110 ± 0.00031	1.04106 ± 0.00031	−0.1	1.04108 ± 0.00031
r_{drag} [Mpc]	147.049	147.09 ± 0.26	147.26 ± 0.28	+0.6	147.18 ± 0.29

Ade et al. https://arxiv.org/abs/1807.06209, A&A (2020)

Table 5.2 Properties of the Benchmark Model.

List of ingredients		
Photons:	$\Omega_{\gamma,0} = 5.35 \times 10^{-5}$	
Neutrinos:	$\Omega_{\nu,0} = 3.65 \times 10^{-5}$	
Total radiation:	$\Omega_{r,0} = 9.0 \times 10^{-5}$	
Baryonic matter:	$\Omega_{\mathrm{bary},0} = 0.048$	
Nonbaryonic dark matter:	$\Omega_{\mathrm{dm},0} = 0.262$	
Total matter:	$\Omega_{m,0} = 0.31$	
Cosmological constant:	$\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.69$	
Important epochs		
Radiation–matter equality:	$a_{rm} = 2.9 \times 10^{-4}$	$t_{rm} = 0.050$ Myr
Matter–lambda equality:	$a_{m\Lambda} = 0.77$	$t_{m\Lambda} = 10.2$ Gyr
Now:	$a_0 = 1$	$t_0 = 13.7$ Gyr

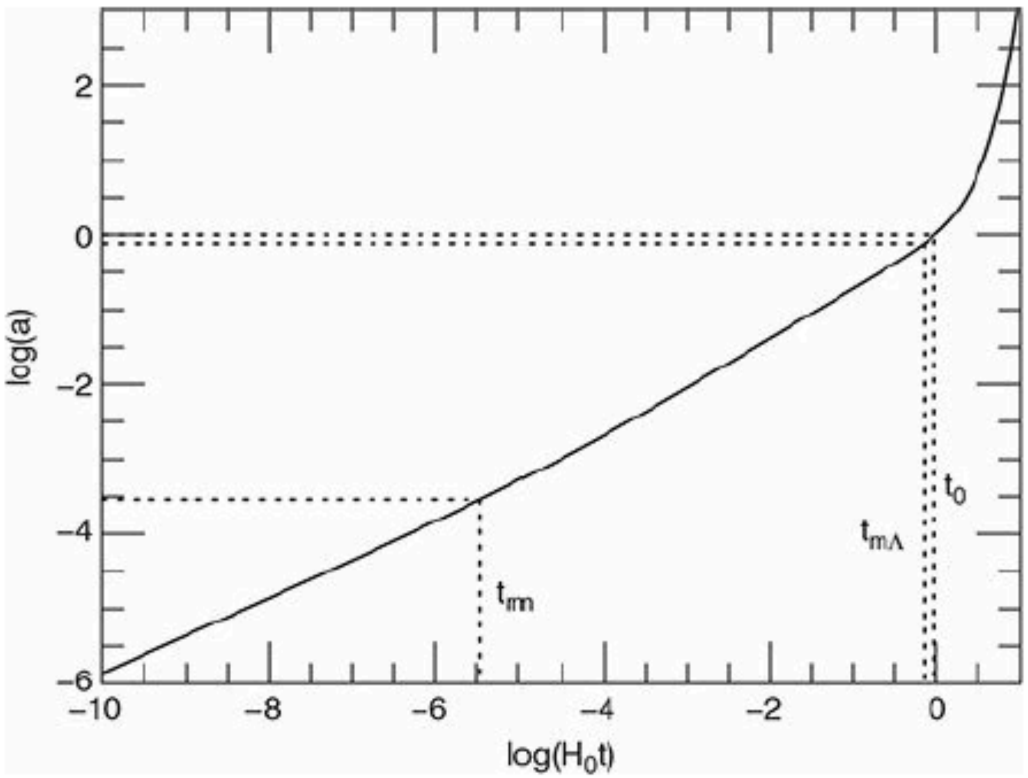


Figure 5.8 The scale factor a as a function of time t (measured in units of the Hubble time), computed for the Benchmark Model. The dotted lines indicate the time of radiation–matter equality, $a_{rm} = 2.9 \times 10^{-4}$, the time of matter–lambda equality, $a_{m\Lambda} = 0.77$, and the present moment, $a_0 = 1$.

Ref: Introduction to Cosmology (B.Ryden, 2016)

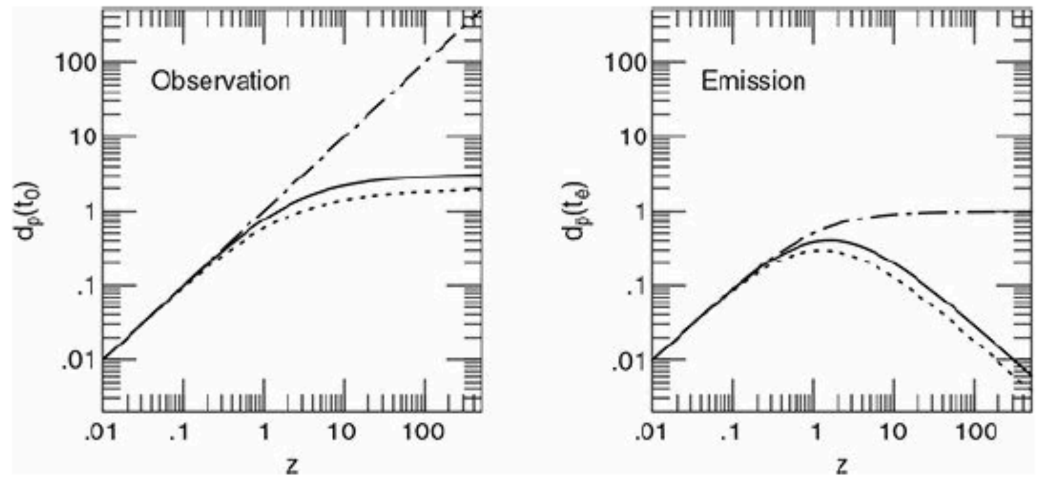


Figure 5.9 The proper distance to a light source with redshift z, in units of the Hubble distance, c/H_0. The left panel shows the distance at the time of observation; the right panel shows the distance at the time of emission. The bold solid line indicates the Benchmark Model. For comparison, the dot-dash line indicates a flat, lambda-only universe, and the dotted line a flat, matter-only universe.

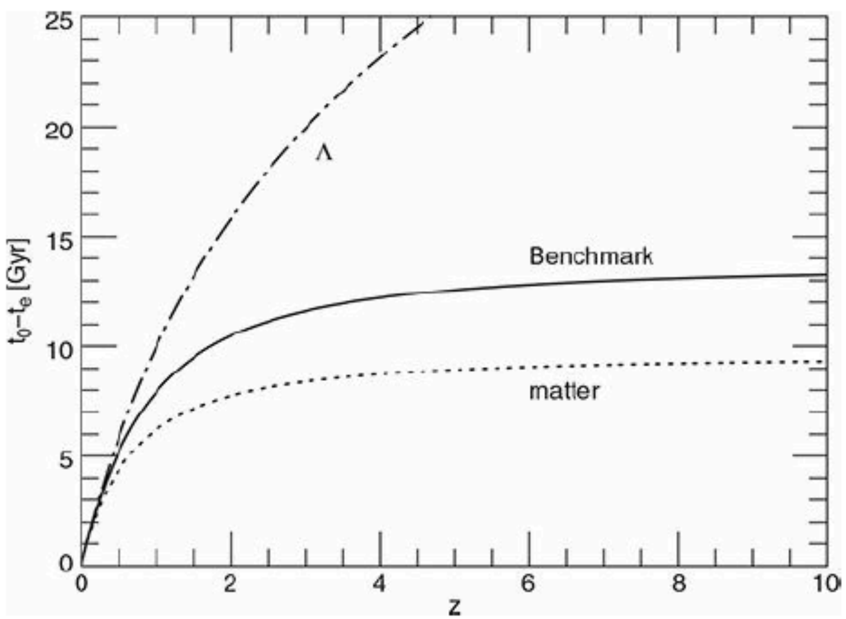
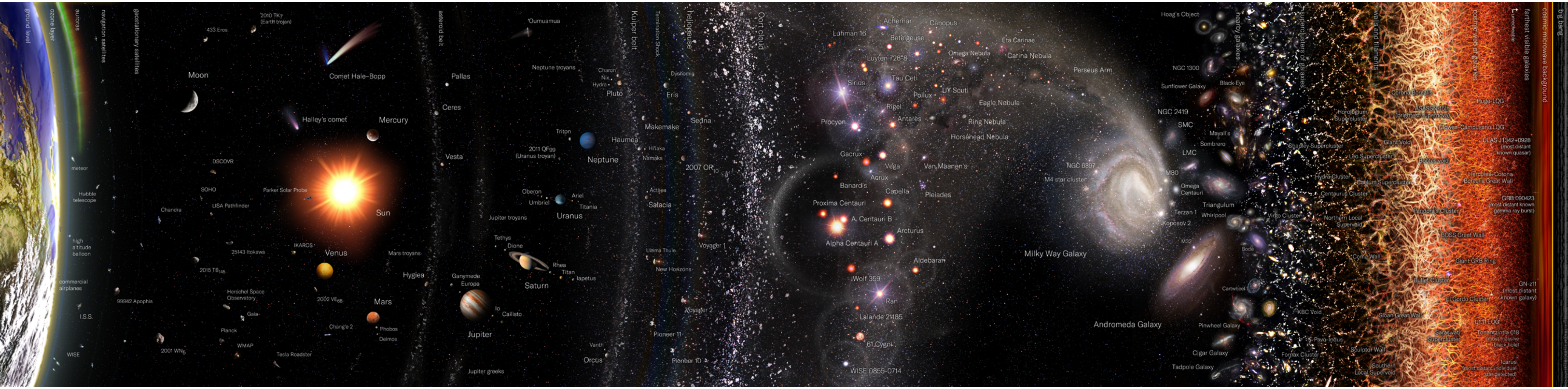


Figure 5.10 The lookback time, $t_0 - t_e$, for galaxies with observed redshift z. The Hubble time is assumed to be $H_0^{-1} = 14.4\,\text{Gyr}$. The bold solid line shows the result for the Benchmark Model. For comparison, the dot-dash line indicates a flat, lambda-only universe, and the dotted line a flat, matter-only universe.

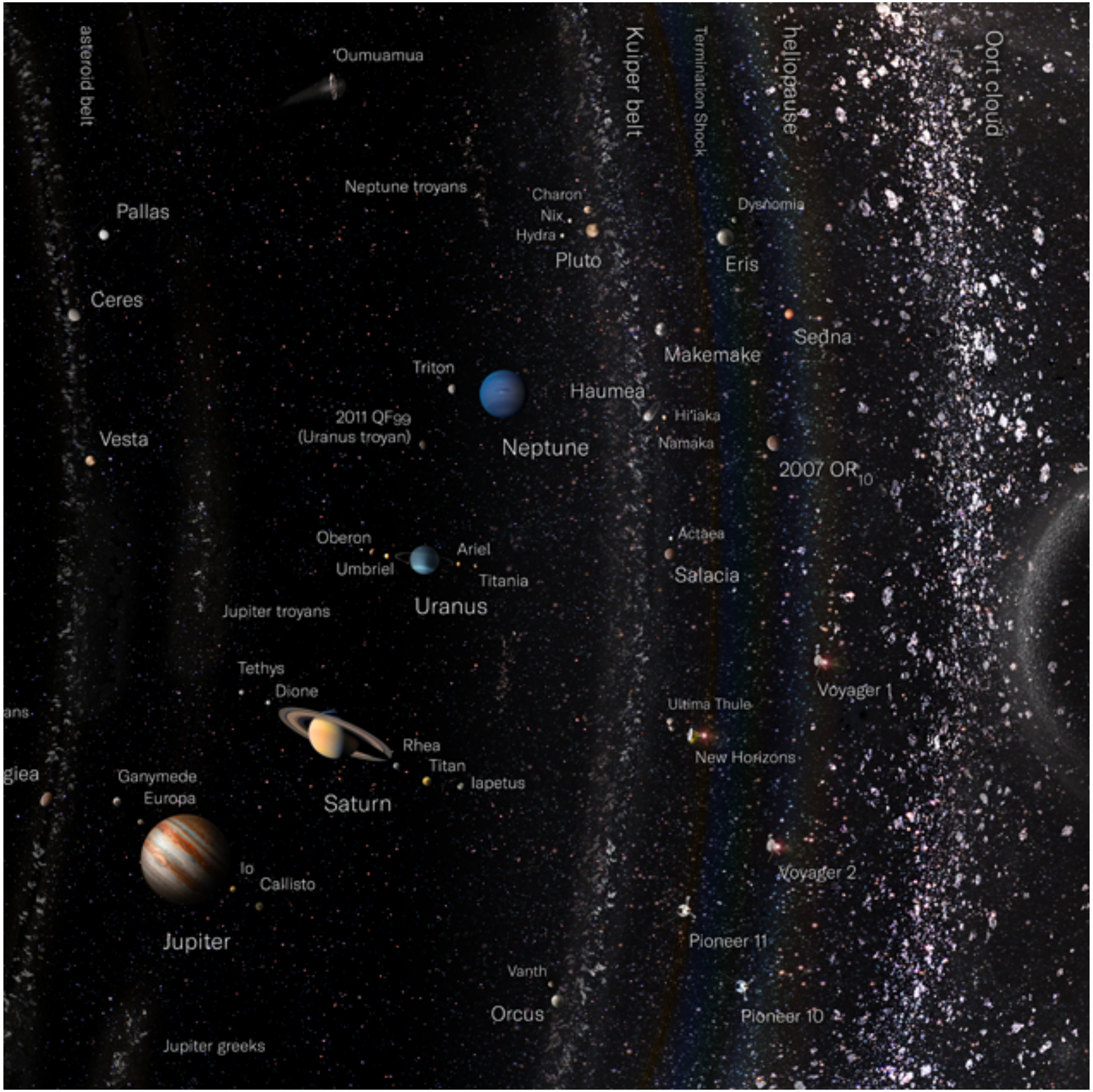
Ref: Introduction to Cosmology (B.Ryden, 2016)

FIM

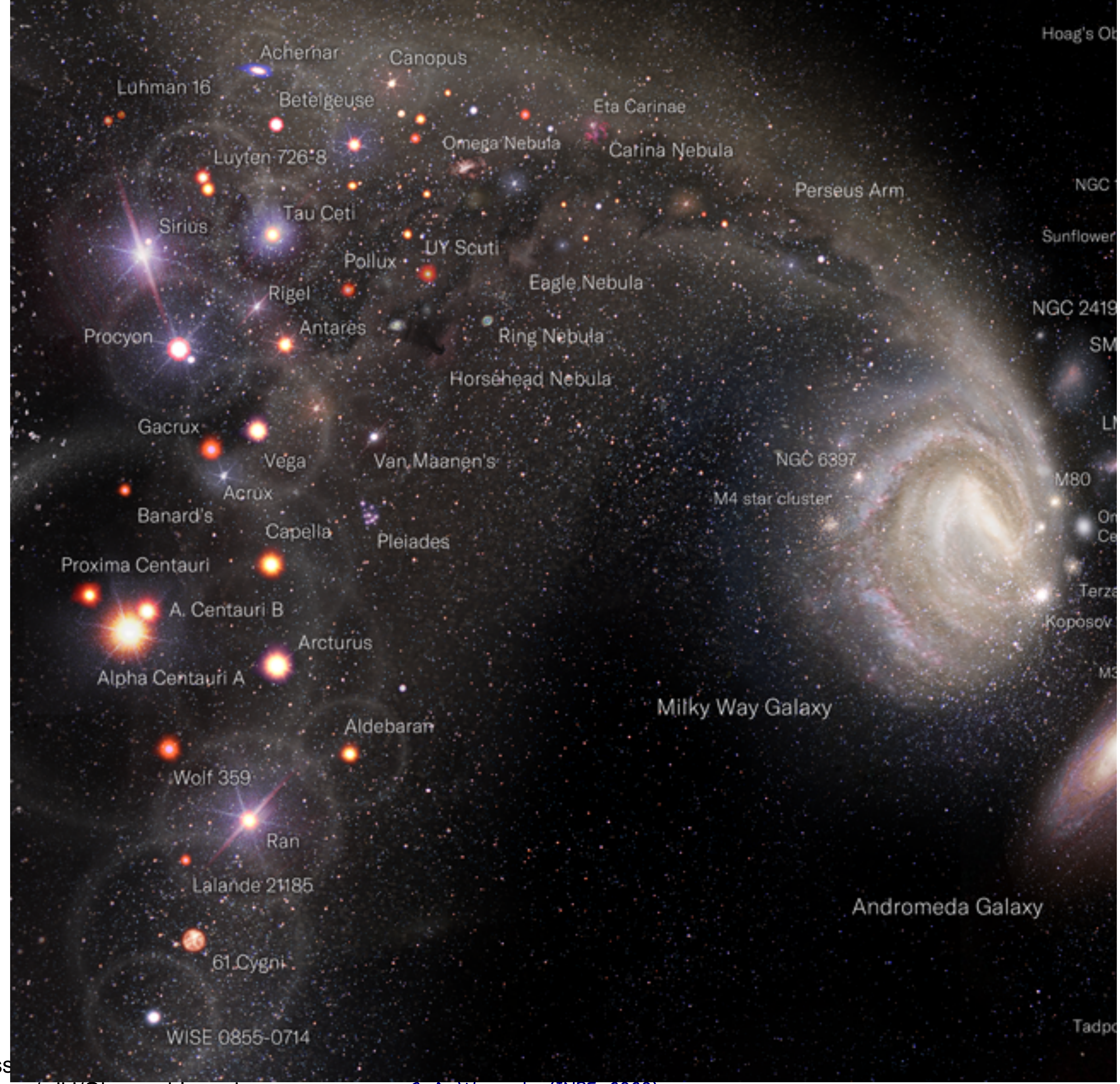


Pablo Carlos Budassi
https://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe

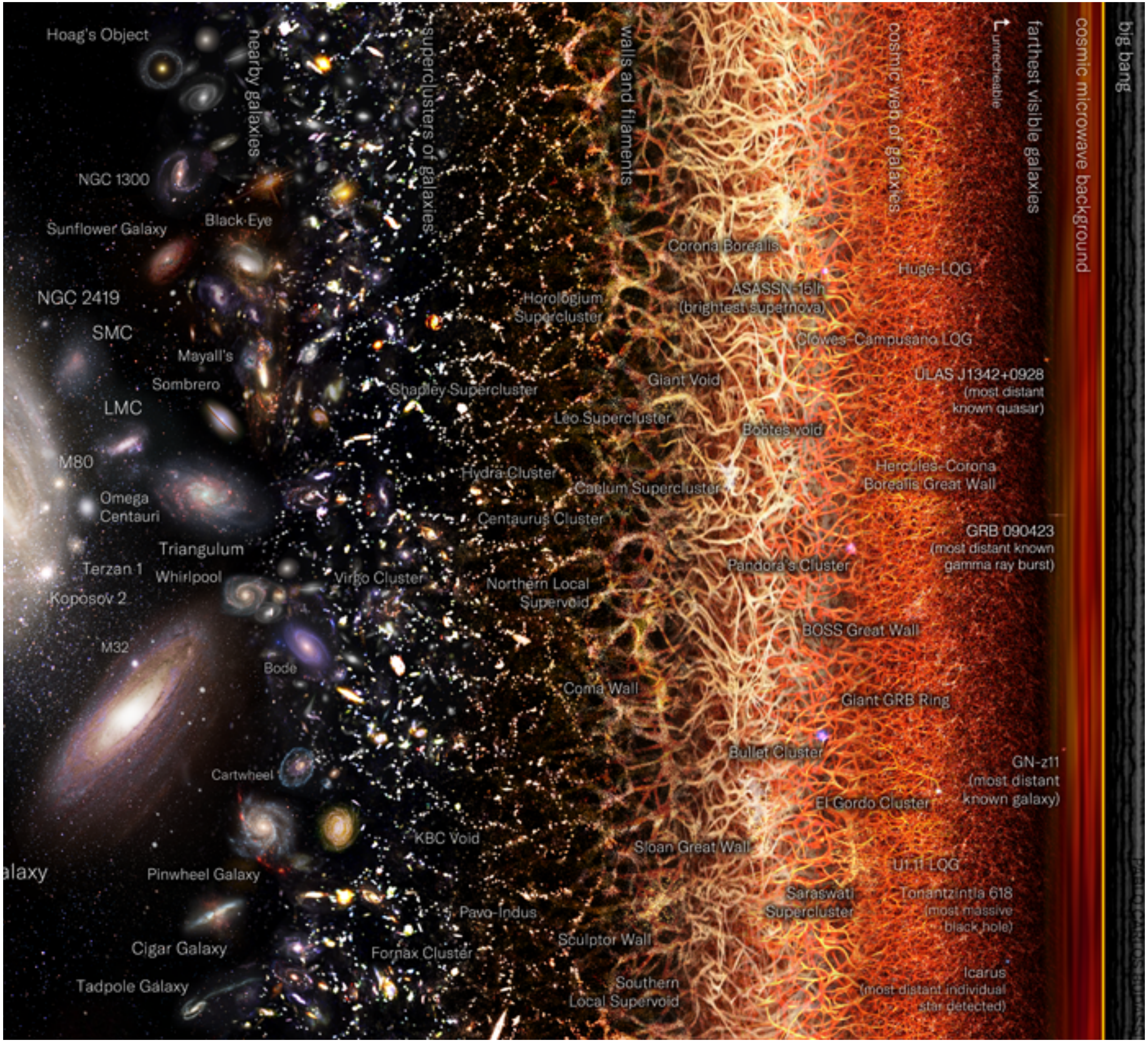
Pablo Carlos Budassi
https://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe



Pablo Carlos Budassi
https://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe



Pablo Carlos Budass
https://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe



Pablo Carlos Budassi
https://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe